XXIV Международный турнир «Компьютерная физика и математика»

XXIV Международный турнир «Компьютерная физика и математика» традиционно пройдет со 2 по 9 февраля 2020 года в г. Протвино на базе Института физики высоких энергий. На Турнир МТКФиМ-2020 также приглашаются участники на отдельный конкурс «Компьютерного творчества», участники которого смогут выступить с докладами по своим проектам.

Заявки на участие в турнире принимает Международный интеллект-клуб «Глюон» (gluon@yandex.ru).

Задание заочного тура (компьютерная физика) НЕОБЫЧНАЯ ГРАВИТАЦИЯ

В современной физике большое внимание уделяется разработке гравитационной теории. Классическая теория тяготения, созданная Ньютоном и изученная поколениями выдающихся исследователей, получила дальнейшее развитие в общей теории относительности Эйнштейна и в трудах многих других исследователей. Дальнейшее развитие гравитационной теории ведется в направлении объединения ее с теориями электрослабого и сильного взаимодействий.

Классический закон всемирного тяготения, позволяющий рассчитать силу взаимодействия F двух материальных точек, хорошо известен:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

где m_1, m_2 – массы взаимодействующих тел, R – расстояние между точками.

Астрономические наблюдения показали, что траектории планет Солнечной системы, в частности, орбита Меркурия, не строго подчиняются этому закону. Были предложены различные поправки. Одна из таких поправок требовала увеличить показатель степени при расстоянии. Поправка требовалась малая, порядка 10^{-7}. Однако это приводило к противоречиям, например, возникали сложности в записи размерности гравитационной постоянной. Разработка общей теории относительности позволила более глубоко проанализировать результаты астрономических наблюдений, сохранив классическую форму закона как предельный случай свойств пространства – времени.

Теоретическая физика делает вывод, что в пространствах, размерность которых отлична от трех, показатель степени при расстоянии в законе всемирного тяготения не равен двум.

Рассмотрим плоское движение трех тел в гипотетическом пространстве, в котором закон всемирного тяготения имеет вид

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^n}.$$

Пусть масса m_1 существенно превосходит массу m_2. Потенциальная энергия тела массой m_2 в гравитационном поле, создаваемом телом массой m_1, определяется следующим образом:

$$\Pi = \int_{\infty}^{R} F(r)dr = -\frac{Gm_1m_2}{R^{n-1}},$$

Назовем первой космической ($V_{1к}$) скорость тела в той точке траектории, где кинетическая энергия тела равна половине модуля потенциальной энергии, а второй космической ($V_{2к}$) скорость, при которой кинетическая энергия равна модулю потенциальной.

Уравнения движения тела в прямоугольной системе координат имеют вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y$$

Задание

1. Для случаев n = 2,01, n = 1,5 и n = 3 получите траектории движения трех тел, первоначально расположенных на одной прямой в порядке m_1, m_2, m_3. Начальные расстояния составляют: между первым и вторым телами 1 км, между первым и третьим телами 5 км. Начальные скорости второго и третьего тел направлены в одну сторону перпендикулярно прямой, на которой первоначально расположены тела, первое тело имеет скорость, равную нулю, значения скоростей второго и третьего тела равны их первым космическим скоростям.

2. Для случая n = 3 и значений начальных скоростей третьего тела, равных $V_{1к}$, $1{,}1V_{1к}$ и $V_{2к}$, получите траектории движения трех тел, первоначально расположенных на одной прямой в порядке m_1, m_2, m_3. Начальные расстояния составляют: между первым и вторым телами 1 км, между первым и третьим телами 5 км. Начальная скорость третьего тела направлена перпендикулярно прямой, на которой первоначально расположены тела. Первое и второе тела имеют скорости, равные нулю.

3. Для случая n = 1,5 и значений начальных скоростей третьего тела, равных $V_{1к}$, $1{,}1V_{1к}$ и $V_{2к}$, получите траектории движения трех тел, первоначально расположенных на одной прямой в порядке m_1, m_2, m_3. Начальные расстояния составляют: между первым и вторым телами 1 км, между первым и третьим телами 5 км. Начальные скорости второго и третьего тел направлены перпендикулярно прямой, на которой первоначально расположены тела. Начальная скорость первого тела равна нулю, второго тела – половине первой космической.

Значение гравитационной постоянной $6{,}67 \cdot 10^{-11}$. Размерность гравитационной постоянной в каждом из пространств определяется значением показателя степени n. Массы тел: $m_1 = 10^{13}$ кг, второго $m_2 = 10^{10}$ кг, $m_3 = 7 \cdot 10^{10}$ кг.

В помощь участникам МТКФиМ

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений практически не требует каких-либо специальных знаний, а реализация простейшего алгоритма (схема Эйлера) фактически базируется только на определении понятия производной. В качестве примера реализации схемы Эйлера и обсуждения возникающих при этом типичных проблем рассмотрим задачу о колебаниях математического маятника. Известно, что уравнение, описывающее свободные колебания математического маятника, имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin x=0.$$

Здесь x – угол отклонения маятника от положения равновесия, l – длина нити подвеса, g – ускорение свободного падения, точка над переменной означает производную по времени.

К этому уравнению должны быть заданы также начальные условия. Таких условия два: начальные значения угла отклонения от положения равновесия и угловой скорости движения

$$x(t=0)=x_0;\ \ \frac{dx}{dt}(t=0)=v_0$$

Отметим, что часто именно в правильной формулировке начальных условий содержится вся физическая суть задачи. В нашем примере будем для определенности считать, что производная $\dfrac{dx}{dt}(t=0)=0$, а x_0 принимает некоторое ненулевое значение. С физической точки зрения это означает, что в начальный момент времени маятник отклонен на некоторый угол и является неподвижным.

Наличие аналитического решения для уравнения малых колебаний математического маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}x=0$$

позволяет сделать анализ решения для предельного случая. При заданных начальных условиях это решение записывается в виде

$$x(t)=x_0\cos\omega_0 t.$$

Без ясного понимания физической сути рассматриваемой задачи возможность ее успешного численного моделирования часто оказывается под вопросом.

Перейдем теперь к обсуждению реализации алгоритма численного решения уравнения с начальными условиями в рамках метода Эйлера. Заметим, прежде всего, уравнение второго порядка эквивалентно двум уравнениям первого порядка

$$v=\frac{dx}{dt};\quad \frac{dv}{dt}+\frac{g}{l}\sin x=0$$

Очевидно, начальные условия теперь определяют значения каждой из неизвестных функций в начальный момент времени.

Заменим значения производных их конечно-разностной схемой при конечных значениях Δt:

$$v(t+\Delta t)=v(t)-\omega_0^2\sin x(t)\Delta t,$$
$$x(t+\Delta t)=x(t)+v(t)\Delta t.$$

В предельном случае $\Delta t\to 0$ система конечно разностных уравнений эквивалентна исходной системе. При малом, но конечном значении Δt (в дальнейшем эту величину будем называть шагом интегрирования), уравнения приближенно описывают исходное, причем тем точнее, чем меньше величина шага интегрирования. Очевидно, что конечно-разностные уравнения позволяют определить значения координаты и скорости в момент времени $t+\Delta t$ по соответствующим значениям в момент времени t:

$$v(t+\Delta t)=v(t)-\omega_0^2\sin x(t)\Delta t,$$
$$x(t+\Delta t)=x(t)+v(t)\Delta t.$$

Собственно, эти выражения и задают схему Эйлера. Зная значения функций в начальный (нулевой) момент времени, мы определяем их в момент времени Δt, затем, рассматривая полученные значения как начальные, в момент времени $2\Delta t$, и так далее. Результатом последовательного применения данной процедуры будет определение функций $x(t)$ и $v(t)$ в дискретный набор значений времени $n\Delta t$ при натуральном n.

Отметим еще одну проблему, возникающую при реализации алгоритма по схеме Эйлера. Так, если сначала компьютер вычисляет значение скорости, то при вычислении координаты можно использовать уже вычисленное новое значение скорости $v(t+\Delta t)$. Можно взять также некоторую линейную комбинацию «старого» $v(t)$ и «нового» значений $v(t+\Delta t)$. Правильный выбор оптимальной комбинации в ряде случае может позволить существенно оптимизировать численный алгоритм (более подробно см. [1]).

Основной способ контроля точности результатов – это изменение шага интегрирования по времени, и сопоставление результатов, полученных с разным шагом. В качестве дополнительной проверки полезно использовать различные другие критерии. Например, в нашем примере таким критерием может контроль выполнения закона сохранения полной механической энергии системы.

Важным элементом работы является графическое представление результатов. Графики зависимостей, полученных в работе, могут быть «нарисованы» как графическими средствами использованных пакетов программ, так и с использованием специальных графических редакторов.

Рассмотренный пример не ограничивает творческое применение других методов решения уравнений, но жюри МТКФиМ не считает задачу полностью решенной, если применяются готовые математические пакеты (MathCad и др.).

Турнир «Компьютерная Физика» проводится в два тура. Заочный тур турнира начинается в октябре после объявления задания, которое рассылается по заявкам в лицеи, школы и гимназии. Предполагается, что на базе образовательных организаций формируются команды (5 школьников и 1 руководитель), которые заочно готовят задание для участия в турнире. Работая над заданием, команда может обращаться к любым консультантам, формируя временный творческий коллектив. Защита задания заочного тура на турнире. Каждой команде предлагается выступить с докладом и рассказать о решении одного из разделов задачи, продемонстрировав компьютерную программу и ее результаты. Остальные команды в это время исполняют роль оппонента и рецензента. Результаты и научная дискуссия команд докладчиков, оппонентов и рецензентов оценивается жюри. В ходе соревнования все команды демонстрируют их решения и одновременно оценивают решения своих коллег.

Подготовка к очному туру начинается на следующий день после защиты задания заочного тура. Теперь уже помощь руководителя не предусматривается и команды школьников самостоятельно должны найти ответ на поставленные вопросы новой задачи очного тура с помощью написания новой компьютерной программы. Итоги подводятся по обоим турам, абсолютный победитель турнира получает переходной приз «Хрустальный глобус».

Литература

1. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике, в 2 т. – М.: Мир, 1990. – т. 1 349 с., т. 2 – 400 с.